

Фрагмент учебных материалов «УЧЕБНАЯ ТЕТРАДЬ ПО ТЕМЕ «ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК» КАК СРЕДСТВО РЕАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОБЛЕМЫ», разработанных Лесун Ксенией Сергеевной под руководством канд. физ.-мат. наук, профессора СФУ А.М. Аронова

Глава 2. Учебная тетрадь для восьмого класса по теме «Четырехугольник»

§ 2.1 Построение общего понятия четырехугольника

В этой главе мы предлагаем тебе исследовать проблему: как одни отношения между элементами четырехугольника влияют на другие отношения между этими же или другими его элементами. Для решения данной проблемы мы преобразуем ее в ряд задач, которые будем решать в каждом из пунктов.

2.1.1 Четырехугольник как многоугольник

В одной из предыдущих глав ты познакомился с геометрической фигурой – многоугольником. Нарисуй и подпиши различные по форме многоугольники.

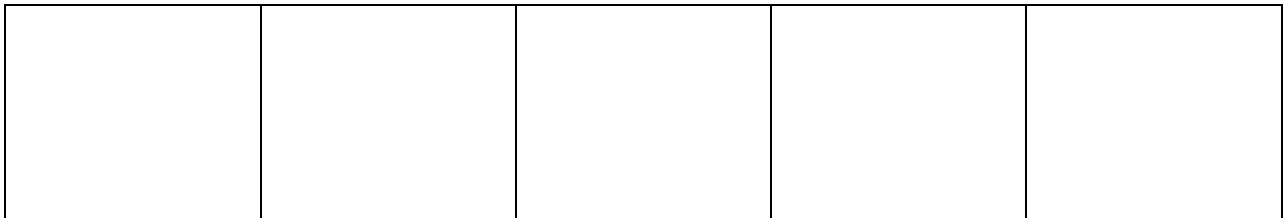


Рис. 1.1

Посмотри, все ли колонки заполнены? Если нет, обратись к учебнику, и заполни оставшиеся.

Нарисуй и назови (опиши) еще хотя бы один многоугольник, форма которого отличалась бы от предложенных тобой выше.

Рис. 1.2

Далее мы будем рассматривать n -угольники, в которых $n=4$ - четырехугольники. Как ты думаешь, почему мы выбрали именно их? Чем четырехугольник отличается от треугольника?

Являются ли фигуры на рис.1.3 четырехугольниками?

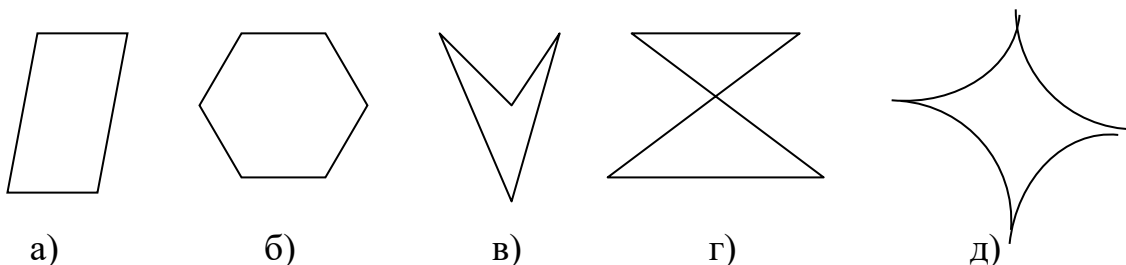


Рис.1.3

Укажи, каким буквам на рис.1.3 соответствуют четырехугольники _____

Мы видим, что, в отличие от треугольника, четырехугольник может быть простым невыпуклым, может иметь самопересечение.

Более того, любая замкнутая четырехзвенная ломаная есть либо четырехугольник (простой), либо обобщенный четырехугольник (число сторон в нем равно числу вершин и равно числу углов).

Задание для любознательных!!!

Докажи утверждение: любая замкнутая четырехзвенная ломаная есть либо четырехугольник (простой), либо обобщенный четырехугольник (число сторон в нем равно числу вершин и равно числу углов).

Все рассуждения запиши в тетради для творческих работ.

Каких по форме четырехугольников не существует?

Эта форма реализуется на многоугольниках с большим, чем четыре, числом сторон. Нарисуй эту форму.

Рис.1.4

Перерисуй рис. 1.3.г.

Рис.1.5

Обозначь вершины на данном рисунке так, чтобы получившаяся ломаная была обобщенным четырехугольником. Напиши название этой ломаной.

Перерисуй рис. 1.3.г еще раз.

Рис.1.6

При каком обозначении вершин получившаяся замкнутая ломаная перестанет являться многоугольником, даже обобщенным? Напиши название этой ломаной.

Сделай вывод о форме четырехугольника с самопересечением.

Задание для любознательных!!!

Посмотри внимательно на рис.1.7.

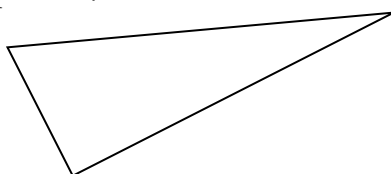


Рис.1.7

Назови фигуру, изображенную на рис.1.7 _____

При каком обозначении вершин данная фигура будет являться четырехугольником?

Изобрази. _____

Для того, чтобы проверить правильность ответа, обратись к словарю и посмотри определение четырехугольника. Соответствует фигура определению или опровергает его?

2.1.2 Четырехугольники с отношением равенства

Назови элементы четырехугольника.

В какой связи между собой находятся элементы фигуры 1.3.a (найди три типа связи, см. рис. 1.1)?

Между какими элементами возможны соотношения?

Какие соотношения возможны между сторонами четырехугольника?

Какие соотношения возможны между углами четырехугольника?

Ты выделил связи и отношения между элементами четырехугольника. Ты считаешь, что сможешь самостоятельно провести небольшое исследование соотношений элементов четырехугольника?

Не сомневайся в своих силах, а мы тебе поможем выяснить как равенство сторон (углов) влияет на отношение между элементами четырехугольника.

Начнем с исследования четырехугольников с двумя равными сторонами. Какие стороны четырехугольника могут быть равны? _____

Изобрази несколько четырехугольников разной формы, у которых две противоположные стороны равны.

Рис.1.8

Влияет ли данное условие на соотношение других его сторон в общем случае?

Влияет ли данное условие на соотношение его углов в общем случае? _____

При каком особом случае это условие задает соотношение его других сторон? Какое соотношение? _____

Изменится ли твой вывод, если две равные стороны будут соседними (все необходимые рисунки сделай на рис.1.9)? _____

Рис.1.9

Изобрази несколько четырехугольников, у которых три стороны равны.

Рис.1.10

Влияет ли равенство трех сторон на соотношение элементов четырехугольника в общем случае? _____

При каком особом случае это условие задает соотношение других его сторон?

Изобрази несколько четырехугольников, у которых два противоположных угла равны.

Рис.1.11

Повлияет ли равенство двух противоположных углов на соотношение других элементов четырехугольника в общем случае? _____

Изменится ли твой вывод, если два равных угла будут соседними (все необходимые рисунки сделай на рис.1.12)? _____

Рис.1.12

При каком особом случае это условие задает соотношение элементов четырехугольника? _____

Изобрази несколько четырехугольников, у которых три угла равны.

Рис.1.13

Как равенство трех углов повлияет на соотношение других элементов четырехугольника в общем случае?

При каком особом случае это условие задает соотношение его сторон?

Какие случаи равенства элементов четырехугольников еще не исследованы?

Задание для любознательных!!!

Мы полагаем, что все четырехугольники, которые ты рисовал до этого, были выпуклыми.

В тетради для творческих работ проверь результаты своего исследования для невыпуклых четырехугольников, в которых две противоположные стороны равны, две соседние стороны равны, два соседних угла равны и т.д.

Какие результаты ты получил? _____

Посмотри на изображения рассмотренных тобой четырехугольников и соотношения их элементов. Какие изображенные четырехугольники кажутся тебе «интересными» (такие четырехугольники, в которых соотношения между одними элементами влияют на другие элементы)? _____

Как ты думаешь, возможно у этих фигур обнаружить «интересные» свойства?

2.1.3 Четырехугольники с отношением перпендикулярности

Исследуя отношение равенства, ты увидел, что частный случай равенства трех

углов может привести к случаю четырехугольника, у которого все углы прямые. А если рассмотреть четырехугольники с разным количеством прямых углов, т.е. с отношением перпендикулярности между сторонами?

Договоримся перпендикулярность сторон рассматривать как наличие прямых углов.

Четырехугольники с каким количеством прямых углов имеет смысл рассматривать?

Объясни свой ответ. _____

Изобрази несколько четырехугольников с двумя прямыми углами.

Рис.1.14

Что общего в форме этих четырехугольников? _____

Влияет ли наличие двух прямых углов на другие элементы четырехугольников?

Как?

Может четырехугольник с двумя прямыми углами быть невыпуклым? Объясни (докажи) свой ответ. _____

Что особенного в форме четырехугольника, у которого прямые углы являются соседними (нарисуй разные четырехугольники такой формы на рис.1.15)?

Рис.1.15

Что можно сказать о сторонах четырехугольников на рис.1.15? _____

Изобрази несколько четырехугольников, у которых три угла являются прямыми.

Рис.1.16

Как данное условие влияет на элементы четырехугольника?

Может ли четырехугольник с тремя равными углами быть невыпуклым? **Объясни** свой ответ.

Сделай вывод: о влиянии перпендикулярных сторон на соотношения элементов четырехугольника.

2.1.4 Четырехугольники с отношением параллельности

Исследуем вопрос: как наличие двух параллельных сторон влияет на отношения между элементами четырехугольника.

Класс фигур примеры, которых представлены на рисунке 1.15, называют *трапециями*. **Дай определение** трапеции.

Трапеция – это _____

Сравни свое определение с культурным. Чем отличаются определения?

Эти отличия существенны? Ограничения на разные элементы могут задавать одну и ту же фигуру? _____ Обе формулировки определяют фигуры, которые

являются трапециями, на рис. 1.15 и 1.17? _____

Сделай вывод. _____

Применять будем культурное и самое общее определение трапеции.

Найди в словаре названия параллельных сторон трапеции.

Как называются другие стороны трапеции?

Ранее ты встречал определение высоты (треугольника). Попробуй изобразить *высоту трапеции*.

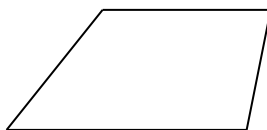


Рис.1.17

У тебя получился перпендикуляр, проведенный из любой точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание?

Если нет, то проведи такой перпендикуляр, он и будет являться высотой.

На этом же рис.1.17 изобрази отрезок, соединяющий середины боковых сторон. Этот отрезок называется *средней линией трапеции*.

Нарисуй произвольную трапецию. Обозначь ее вершины. Отметь середины боковых сторон и проведи среднюю линию трапеции и одну диагональ.

Рис.1.18

Какие новые объекты ты получил? _____

Сделай вывод о средней линии трапеции. Используй теорему о средней линии треугольника. _____

Сформулируй теорему. Докажи ее.

Изобрази трапецию:

с равными боковыми сторонами

с прямым углом

с равными основаниями

с равными углами при основании

с параллельными боковыми сторонами

с равными углами при боковой
стороне

с равными противолежащими углами

Сколько всего разных по форме трапеций ты получил? _____

Сделай вывод о влиянии одних соотношений четырехугольника на другие.

Нарисуй произвольную трапецию

Рис.1.19

Продолжи до прямых основания трапеции и одну из ее боковых сторон. Отметь на рис.1.16 равные углы. Почему эти углы равны?

Сделай вывод о углах трапеции при боковой стороне.

Обратное утверждение к тому, что дал ты, будет звучать следующим образом: если углы четырехугольника при боковой стороне равны 180° , то этот четырехугольник трапеция.

С другой стороны, верно и отрицание этого утверждения: если углы при боковой стороне четырехугольной фигуры не равны 180° , то данная фигура не является простой трапецией.

Задание для любознательных!!!

В данном параграфе ты узнал свойства простой трапеции, а также то, что трапеция является четырехугольником с двумя параллельными сторонами. Но ты знаешь, что четырехугольник с самопересечением так же имеет две параллельные стороны (рис.1.20).

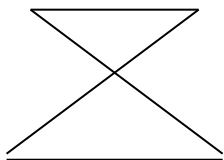


Рис.1.20

Выполняются ли доказанные выше свойства для такого четырехугольника (рис.1.20)? Или, может быть, ты найдешь новые свойства, присущие только ему. Проведи исследование свойств четырехугольника с самопересечением в тетрадке для творческих работ.

Сделай вывод о свойствах четырехугольника с самопересечением, у которого две параллельных стороны.

§2.2 Особые четырехугольники

2.2.1 Особые четырехугольники с отношением параллельности

Мы считаем, что задача, которую тебе предстоит далее решить в данном пункте, связана с ограничением четырехугольника на два элемента.

Так ли это? Далее тебе предстоит ответить.

В предыдущем параграфе, ты изучил фигуру, называемую трапецией. Давай наложим ограничения на нее так, чтобы получить какие-нибудь интересные формы, т.е. исследуем ее.

Изобрази трапецию, у которой боковые стороны равны и не параллельны.

Рис.2.1

Такая трапеция называется *равнобокой*.

Посмотри на углы, прилежащие к основанию. **Что** ты можешь о них сказать?

Теперь изобрази трапецию, у которой углы при основании равны.

Рис.2.2

Что ты заметил?

Теперь перерисуй одну из фигур рис.1.15. Рядом нарисуй трапецию, у которой одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям.

Рис.2.3

Форма таких фигур называется *прямоугольной трапецией*. **Объясни** почему.

Рассмотрим теперь трапецию с параллельными боковыми сторонами.

Изобразим ее.

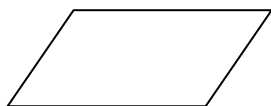


Рис.2.4

Изобрази трапецию с равными противоположными углами и трапецию с равными основаниями.

Рис.2.5

Фигуры на рис.2.4 и рис.2.5 принадлежат классу *параллелограммов*. Сформулируй свое определение, включающее только одно соотношение на элементы трапеции.

Параллелограмм – это трапеция, у которой _____

Сравни свое определение с соответствующим культурным. Чем отличаются

определения?

Соотношение, указанное в культурном определении, является основным и влечет за собой влияние на соотношение других элементов. Его мы примем как основное определение.

Сформулируй еще одно определение параллелограмма, не используя слова «трапеция».

Параллелограмм – это четырехугольник, у которого _____

Сравни свое определение с соответствующим культурным. Чем отличаются определения? _____

Ты заметил, что параллелограмм можно охарактеризовать и как четырехугольник, и как трапецию. Все же параллелограмм как четырехугольник встречается гораздо чаще, т.е. более распространено.

Ты можешь уже сейчас сказать решаешь ли задачу ограничения четырехугольника на два элемента? _____

А какая же задача решается и будет решаться далее? Ответ на вопрос в конце параграфа.

Понятие параллелограмма ты встречал в 7 классе, изучая теорию параллельных прямых. **Вспомни и сформулируй** свойства, говорящие об отношениях между его элементами. _____

Даны следующие утверждения:

1. Параллелограмм является трапецией с равными боковыми сторонами и трапецией с равными основаниями;
2. Любая равнобокая трапеция является параллелограммом;
3. Любая трапеция с равными основаниями будет параллелограммом.

Является ли утверждение 2 и 3 обратными к 1? _____

Для уверенности нарисуй произвольный параллелограмм и проверь. А также произвольную равнобокую трапецию и трапецию с равными основаниями.

Рис.2.6

Верно ли следствие? _____

Что влияет на отношение противоположных сторон и отношение противоположных углов? _____

Как параллельность сторон влияет на отношение соседних углов? **Объясни** свой ответ. _____

Как параллельность сторон влияет на отношение соседних сторон? **Объясни** свой ответ. _____

Как параллельность сторон влияет на диагонали параллелограмма? **Объясни** свой ответ. _____

На какие вопросов ты затрудняешься ответить? _____

Изобрази несколько параллелограммов, имеющих одну общую диагональ. Проведи у всех параллелограммов по второй диагонали.

Рис.2.7

Что ты заметил? _____

Сформулируем утверждение о диагоналях параллелограмма: диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Докажи справедливость этого утверждения.

Дано:

ABCD - _____

O - _____

Доказать: _____

Доказательство:

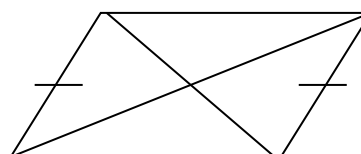


Рис.2.8

$AB=CD$, т.к. _____

$\angle ABO = \angle ODC$ и $\angle BAO = \angle OCD$ по _____

Значит, \triangle _____ $=\triangle$ _____

Сделай вывод о диагоналях параллелограмма.

Сформулируй обратное утверждение.

Попробуй проверить это утверждение самостоятельно. Как ты будешь проверять?

Нарисуй четырехугольник, в данном пункте, связана с ограничением объекта на два элемента? **Объясни свой ответ.** _____

2.2.2 Особый четырехугольник с отношением перпендикулярности

Мы считаем, что в данном пункте будет исследоваться вопрос: как наличие трех равных углов в трапеции влияет на отношения между элементами трапеции. А как считаешь ты? Чтобы правильно ответить на вопрос вспомни решением какой проблемы мы занимаемся.

В первом параграфе у нас остался не исследованным случай, когда в четырехугольнике все углы равны. Нам известно, что если в четырехугольнике все углы равны, то они все прямые (обратись к учебнику).

На рис.2.10 изобрази четырехугольник, у которого все углы прямые. В то же время ты уже знаешь и другие фигуры: трапецию и параллелограмм. Изобрази эти фигуры со следующими ограничениями: трапецию, у которой два противоположных угла прямые на рис. 2.11 и параллелограмм, у которого один угол прямой рис.2.12.

Рис.2.10

Рис.2.11

Рис.2.12

Сколько разных фигур ты получил? Как они называются? _____

Сформулируем утверждение: четырехугольник, у которого все углы прямые является трапецией, у которой два противоположных угла прямые, а также параллелограммом у которого один угол прямой.

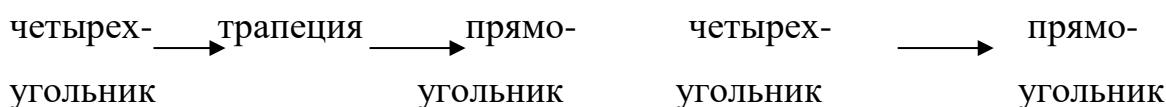
Докажи утверждение. Для этого выдели соотношения задающие предложенные фигуры, обозначь основное отношение.

Сформулируй определение *прямоугольника*, основанное на понятии четырехугольника. _____

Сформулируй определение прямоугольника, основанное на понятии трапеции.

Объясни, чем отличаются данные определения. _____

Подумай, какое суждение лучше и рациональнее.



Составь еще одно подобное суждение.

Мы думаем, что ты предложил суждение, основанное на том, что прямоугольник является параллелограммом. Если прямоугольник является параллелограммом – значит, обладает его свойствами.

Сформулируй свойства, которыми обладает прямоугольник как вид параллелограмма.

Сравни со следующим: *Диагонали прямоугольника равны.*

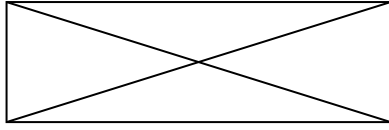


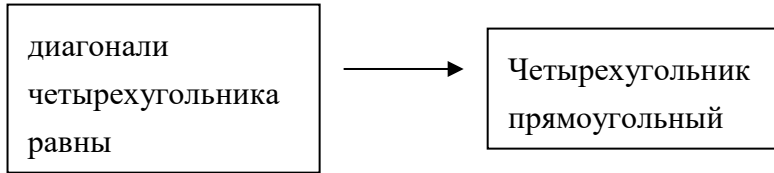
Рис.2.13

Чем твоя формулировка отличается от нашей? _____

Докажи свойство:

Дан прямоугольник _____ с диагоналями _____. Воспользуйся первым признаком равенства треугольников.

Рассмотри следующее суждение.



Верно ли суждение? _____

Изобрази несколько пар равных пересекающихся отрезков, а потом соедини их концы.

Рис.2.14

Попробуй еще раз ответить на вопрос о верности суждения? _____

Сформулируй и докажи признак прямоугольника. _____

Как можно сформулировать задачу, решаемую в данном параграфе:

1. как наличие _____ равных углов влияет на отношения между элементами

2. как наличие _____ равных углов влияет на отношения между элементами трапеции.

Эти задачи эквивалентны? _____

Какая из этих задач помогает решить нашу проблему?

2.2.3 Особые четырехугольники с отношением равенства

Посмотри на фигуру, изображенную на рис. 2.15.

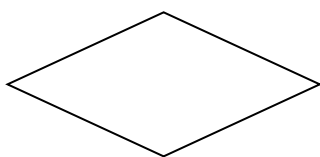


Рис. 2.15

Какие соотношения ты заметил между углами: _____; Какие

соотношения ты заметил между сторонами: _____

Фигура, изображенная на рис.2.15, называется *ромбом*.

Ромб – _____

Сравни с культурным и выдели отличия.

Рис.2.16

На рис.2.16 постройте ромб ABCD и сделай соответствующие определению пометки.

В ромбе ABCD проведи диагональ. Какие новые фигуры ты получил? Что ты можешь сказать о этих фигурах? _____

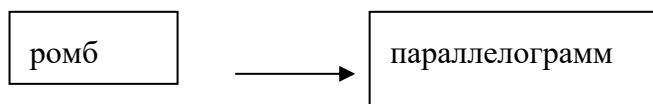
Нанеси на рисунок соответствующие пометки. Какой вывод можно сделать о диагонали? _____

Подумай, будет ли для второй диагонали справедлив вывод. Проведи вторую диагональ в ромбе ABCD. Какие новые объекты ты получил? Что о них можно сказать? _____

Сделай вывод о диагоналях ромба. _____

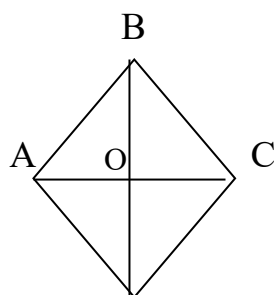
Сформулируй свойства диагоналей ромба и докажи эти свойства.

Верно ли суждение?



Если нужна помощь, обратись к учебнику – 17 стр. _____

Обоснуй каждое из утверждений.



$\angle AOB = \angle AOD = \angle COB = \angle COD$, т.к. _____

$AB = BC = CD = DA$, по _____

$OB = OD$ и $AO = OC$ _____

Сделай вывод и сформулируй теорему о свойстве диагоналей ромба. _____

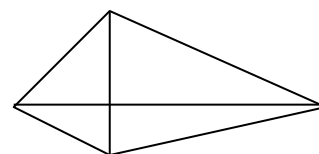
рис.2.17

Вспомни различия свойств и признаков объектов. Зная свойство, **сформулируй** признак диагоналей ромба. _____

Будет ли верным утверждение: если диагонали четырехугольника пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами всех углов, то этот четырехугольник - ромб? _____

Посмотри на рис.2.18:

Он удовлетворяет условию диагоналей? _____



Соотношения каких элементов недостает для того, рис.2.18
чтобы данный четырехугольник стал ромбом? _____

Докажи утверждение о том, что диагонали ромба являются биссектрисами углов.

Сделай рисунок.

Рис.2.19

Воспользуйся свойством равнобедренных треугольников.

Выдели равные треугольники и **сделай вывод**.

Рассмотрим ромб, у которого все углы прямые. Его ты знаешь уже давно. Вспомни как он называется и дай его определение.

На основе изученных в предыдущих пунктах фигур **сформулируй** следующие определения.

Квадратом называется четырехугольник, у которого _____

Квадратом называется трапеция, у которой _____

Квадратом называется прямоугольник, у которого _____

Квадратом называется ромб, у которого _____

Загляни в словарь и посмотри, какое же определение квадрата является основным.

Какие из свойств упомянутых фигур будут свойствами квадрата? Перечисли их.

Какие признаки имеет квадрат?

Словарь:

Квадратом называется ромб, у которого все углы прямые.

Основаниями трапеции называются параллельные стороны трапеции, две другие стороны называются боковыми сторонами трапеции.

Параллелограммом называется трапеция с параллельными боковыми сторонами.

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Признаком называется показатель, примета, знак, по которым можно узнать, определить что-нибудь. В отличие от свойства, задана характеристика, по которой можно определить объект.

Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые.

Ромбом называется четырехугольник, у которого все стороны равны.

Свойством называется то, что характеризует какую – либо сторону предмета и то, что выявляется во взаимоотношении данного предмета с другими предметами или явлениями. Объект задан находим его характеристики.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

Трапецией называется простой четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны.

Четырехугольником называется многоугольник с четырьмя углами.

Методика работы с учебной тетрадью по теме «Четырехугольник»

1 Описание учебной тетради по теме «Четырехугольник»

Процесс работы школьника с учебной тетрадью видоизменяется по ходу разворачивания материала. Этот ход задается логикой восхождения от абстрактного к конкретному, которая выражается в переходе от общего к особым случаям.

В тетради происходит движение от рода к видам четырехугольников. Движение имеет вид последовательного рассмотрения всех возможных отношений между элементами четырехугольника. Первый параграф тетради посвящен рассмотрению общих отношений равенства, перпендикулярности и параллельности. Именно в такой последовательности и проводится «учебное» исследование, т.к. отношение равенства задает множество пробных вариантов, не представляющих интереса для изучения свойств. Отношение перпендикулярности задает лишь три четырехугольника, два из которых являются особыми. Отношение параллельности имеет один особый случай – трапецию.

Второй параграф посвящен рассмотрению особых четырехугольников. Нами была выбрана традиционная последовательность расположения данного материала.

Опишем ход материала, предложенного в учебной тетради.

Сначала ученик вспоминает уже изученный материал, придумывает новую форму многоугольника (которая будет представлять собой композицию из нескольких стандартных форм). Это задает переход к четырехугольникам, т.е. рассмотрению n -угольников, в которых $n=4$. Для данного материала отведен один лист.

После наблюдения, основанного на предлагающихся ребенку рисунках,

происходит открытие факта, что любая замкнутая четырехзвенная ломаная есть либо простой четырехугольник, либо обобщенный (число сторон в нем равно числу вершин и равно числу углов). Это занимает один абзац в учебной тетради. Тем ученикам, которые проявят интерес к этому факту в «задании для любознательных» предлагается доказать его.

Выделив элементы и отношения между элементами четырехугольника при помощи наводящих вопросов, ученик проводит исследование соотношений элементов четырехугольника (это занимает девять листов). Ему предлагается изобразить несколько четырехугольников разной формы с какими-либо ограничениями на его элементы (мы предлагаем десять вариантов ограничений), происходит работа с отношениями равенства, параллельности и перпендикулярности. Ученик сам убеждается в факте, что лишь особые случаи форм четырехугольников приводят к соотношениям и, в дальнейшем, к «интересным» фактам.

Дальнейший материал занимает одиннадцать листов и предполагает конкретизацию, т.е. изучение особых четырехугольников. Он строится на работе с определениями, утверждениями, суждениями, доказательствами, проведении исследования.

В данном учебном пособии можно заметить небольшое количество рисунков. Этот шаг был предпринят с целью предложения ученикам самостоятельных действий. Именно такая форма задания фигуры будет ими лучше увидена, прочувствована и осознана. Вариантов изображения учеником однообразных рисунков, по нашему мнению, возникнуть не должно, т.к. предполагается, что обучение по данным тетрадям ведется второй год и у учеников уже сформировано представление о «разных фигурах».

Линия исследования в учебной тетради не является ключевой. Если в 6-7 классах ученикам необходимо предоставлять такую возможность, т.к. они должны попробовать различные виды деятельности, то в 8 классе они уже определились с направлением углубленного изучения. В проведении углубленного предметного исследования всеми школьниками на данном этапе нет необходимости.

Суждение в рамках данной тетради понимается как следствие одного утверждения из другого. Важно понимание ребенком того, что не всегда верно следствие «необходимо и достаточно» (т.е. \leftrightarrow) и необходимо правильное «чтение» таких следствий. По отношению к изучаемому материалу должны привести к осознанию непереносимость свойств одних форм четырехугольников на другие.

2 Формулирование определений

Работа с определениями строится, в основном, на сравнительном анализе. Ученику по рисунку требуется дать определение какой-либо из форм четырехугольников, а затем сравнить с культурным определением, выделить отличия или сходство.

Все встречающиеся в предметном материале темы «Четырехугольник» определения - родовидовые. В учебной тетради ученику самому предлагается задать род фигуры, а иногда одна фигура может быть отнесена и к нескольким родам. Опишем способ задания определения в тетради: ученикам предлагается готовый рисунок; проводится наблюдение; предлагается сформулировать определение.

Дальнейшее сравнение с культурным позволяет проконтролировать ход построения определения.

Опишем, что подразумевает под собой сравнение в данном случае. Главным образом, ученик должен выделить существенно отличие его определения от классического или нет. В условиях, когда возникает несколько разных соотношений задающих одну фигуру, ученик должен выделить существенное отношение. В некоторых случаях (в начале), оно ему сообщается.

Опишем организацию четырех представленных в данной тетради определений.

1. Изображен частный случай класса фигур, ученику необходимо обобщить его до класса и сформулировать свое определение, которое далее сравнить с культурным.

2. Изображена фигура, требуется ее определить через две других известных

ранее фигуры. Получившиеся определения сравнить с культурными.

3. Требуется изобразить три фигуры, каждая из которых получается как частный случай ограничения разных фигур на разные элементы (результат одна фигура). Самостоятельно исследовать и доказать эквивалентность определений. По образцу составить диаграмму основываясь на определении.

4. У изображенной фигуры нужно выделить соотношения элементов, дать свое определение. Убедиться в том, что в словаре определение сформулировано подобным образом.

Первое из серии данных определений задает образец и ключевой характер работы, т.е. первый начальный уровень.

Определять фигуру можно различными способами. Второе определение иллюстрирует факт того, что одну фигуру можно определять несколькими способами, в данном случае двумя. То, что фигура может быть помещена в два различных класса, задает следующий уровень изучения предметного материала. В тексте переход с одного уровня на другой, а также усложнение в рамках одного уровня не выделены, проследить их можно сделав методический анализ.

Если до этого ученики формировали свое понимание фигуры, основываясь на предлагающемся образе, то третье определение требует обратного действия: по разным определениям сформировать свое видение и образ фигуры. Одним из усложнений реализовавшимся в этом примере следует выделить исследование на синонимию. На этом же примере можно выделить еще одно усложнение: возможность и умение сформулировать что-либо по образцу.

В четвертом определении можно заметить следующее усложнение: выделение отличий и доказательство без письменной фиксации. Но данное усложнение будет относиться к первому уровню освоения предметного материала линии определений, т.к. задает работу только с одним классом фигур.

3 Работа с утверждениями

Ученики работают с готовыми утверждениями и утверждениями, которые необходимо сформулировать самому ученику.

Утверждения, сформулированные авторами, задают собой способ организации и построения, который, подразумевается, и будет усвоен. Главное, что должен выделить ученик, это наличие в утверждении двух фигур и их связь ($A \rightarrow B$). Это реализуется следующим образом: сначала ученику формулируется утверждение, а затем он должен сам сформулировать подобное утверждение. Для этого ему предлагается нарисовать конкретную фигуру, если нужно, сделать дополнительные построения, которые будут являться основной идеей при формулировании утверждения.

Утверждение первого типа можно зафиксировать уже в начале первого пункта: любая замкнутая четырехзвенная ломаная есть либо четырехугольник, либо обобщенный четырехугольник. Запишем его в символах математической логики: $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$. Работу, нацеленную на доказательство данного утверждения, предлагается проделать лишь в «задании для любознательных», предназначенном для углубленного изучения математики.

Далее ученик проводит исследование, а возвращение к линии утверждений, и ее усложнение происходит во втором параграфе. Ученику прямо формулируется обратное утверждение к тому, которое предлагается до этого сформулировать ему самому. Оно звучит следующим образом: если углы четырехугольника при боковой стороне равны 180° , то этот четырехугольник трапеция. В логической интерпретации выглядит это следующим образом: $(D \Rightarrow E)$. А также отрицание обратного: если углы при боковой стороне четырехугольной фигуры не равны 180° , то данная фигура не является простой трапецией. Т.е. символика будет представлять собой $(\neg E \Rightarrow \neg D)$.

Следующим уровнем усложнения в рассматриваемой предметной линии утверждений, можно выделить объединение двух утверждений. Во втором пункте второго параграфа появляется утверждение типа: $A \Rightarrow (B \vee C)$, а также построение обратного к данному утверждения в виде вопроса: “Является ли данное утверждение обратным” (далее предлагается вариант). В данной линии также осуществляется переход и на второй уровень. Новый уровень сложности представлен утверждением вида, где явно не выделены A и B в логической символике $A \Rightarrow B$: “Диагонали

параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам”. Построение утверждения обратного к данному требует больших усилий от ученика. Под явной формулировкой утверждения мы понимаем логические конструкции вида:

- «если ..., то...»;
- «любая...является...».

Следовательно, не явным утверждением будет такое где, одна из геометрических фигур скрыта и может быть выделена лишь при анализе логической схемы импликации $A \rightarrow B$.

Подведем итог. Для работы с утверждением в тетради представлены семь готовых утверждения:

1г) любая замкнутая четырехзвенная ломаная является либо четырехугольником, либо обобщенным четырехугольником;

2г) если углы четырехугольника при боковой стороне равны 180° , то этот четырехугольник трапеция

3г) если углы при боковой стороне четырехугольной фигуры не равны 180° , то данная фигура не является простой трапецией;

4г) диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам

5г) любой параллелограмм является трапецией с равными боковыми сторонами и трапецией с равными основаниями;

6г) любая равнобокая трапеция является параллелограммом;

7г) любая трапеция с равными основаниями является параллелограммом.

Также три утверждения, рассматриваемые как импликация, предлагается сформулировать ученику:

1г) углы трапеции при боковой стороне равны 180° ;

2г) утверждения 6г) и 7г) не являются обратными к 5г);

3г) построение однозначного утверждения обратного 4г) невозможно.

Представленные готовые утверждения служат базой для построения утверждений учениками.

Утверждение 1г) задает общий способ построения утверждения и выступает

достаточным условием для формулирования утверждения 1г).

Для формулирования утверждения 2г) в качестве материальной базы представлены утверждения 5г), 6г) и 7г). А утверждения 2г) и 3г) задают способ построения обратного утверждения.

Утверждение 3г) однозначно не может быть сформулировано учеником. Лишь выделение импликации из уже представленных утверждений позволит ученику правильно сформулировать обратное утверждение.

4 Доказательства

Доказательства в учебной тетради открыто не предлагаются ученику. Способы и изложение доказательств полно представлены в учебнике. В тетради ученику необходимо полностью выстраивать ход доказательства. Основу для выполнения такого задания ученикам дают базовая идея и теоретический факт. Базовая идея подразумевает под собой элементы дополнительных построений и направление их использования для доказательства. В связи с развитием материала в дальнейшем какой-то из элементов ученику уже не сообщается.

В учебной тетради ученик должен провести доказательство шести теоретических фактов:

- 1) показать верность следствия одного утверждения, связанного с параллелограммом, из другого или его опровержение приведя контрпример;
- 2) средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме;
- 3) диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;
- 4) диагонали прямоугольника равны;
- 5) диагонали ромба пересекаются под прямым углом и точкой пересечения делятся пополам;
- 6) четырехугольник, у которого диагонали являются биссектрисами его углов, является ромбом.

Первый и самый простой уровень доказательства возникает, когда доказательства как такового и не требуется. На вопрос о следовании одного утверждения из другого достаточно привести пример или контрпример (см. 1).

Второй уровень работы с доказательством можно охарактеризовать следующим образом: ученику сообщается базовая идея, т.е. теоретический факт и идея его применения (см. 2). Ученик должен самостоятельно изложить ход рассуждения, ввести буквенное обозначение вершин и провести работу с построением доказательства. Так при доказательстве теоремы о средней линии трапеции ученику предлагается провести диагональ и рассмотреть получившиеся треугольники, а также вспомнить все, что им известно о средней линии треугольника. Усложнением на втором уровне является доказательство свойства диагоналей параллелограмма: идея доказательства дается ученику через буквенную символику отношений, которую он должен пояснить и обосновать (см. 3).

При доказательстве свойства диагоналей прямоугольника ученику сообщается только теоретический факт без идеи его применения. Это задает новый, третий уровень организации материала.

Доказательство свойств диагоналей ромба построено по такому же принципу, что и доказательство свойства параллелограмма.

Шестое доказательство выступает усложнением доказательства свойств диагоналей прямоугольника. Для построения доказательства ученику предоставляется теоретический факт: использовать свойство равнобедренного треугольника. Не сообщается идея применения данного факта, а также, каким именно свойством равнобедренного треугольника нужно воспользоваться.

На втором уровне появляется необходимость в выстраивании хода рассуждения, для этого ученику дается теоретический факт и идея его применения.

Отсутствие «подсказки» для дополнительных построений, а также в акцентировании внимания на чем-либо в объекте принципиально изменяет задачу ученика. Ему известен только факт, который необходимо как-то применить. Такие особенности в доказательстве задают третий уровень.

Вся тетрадь посвящена одной проблеме, поставленной в учебнике Аронова А.М., Скрипка А.М. «Геометрия - 8»: как одни отношения между элементами четырехугольника влияют на другие отношения между этими же или другими его элементами. Проблема преобразуется в ряд задач, решению которых и посвящена

тетрадь. Пять из задач есть в учебнике, а три (в такой формулировке) представлены впервые: влияет ли равенство двух (соседних или противоположных), а также трех сторон, на какие-то соотношения его других элементов; влияет ли равенство двух (соседних или противоположных), а также трех углов, на какие-то соотношения его других элементов; влияет ли наличие и количество прямых углов на соотношения (параллельности или равенства) элементов четырехугольника.

Представим систему задач:

- влияет ли равенство двух (соседних или противоположных), а также трех сторон, на какие-то соотношения его других элементов; какие свойства и признаки следуют из равенства сторон четырехугольника; какие свойства и признаки следуют из равенства сторон и углов четырехугольника;

- влияет ли равенство двух (соседних или противоположных), а также трех углов, на какие-то соотношения его других элементов;

- влияет ли наличие и количество прямых углов на соотношения (параллельности или равенства) элементов четырехугольника; какие свойства и признаки следуют из условия, что все углы четырехугольника прямые;

- какие свойства и признаки (отношения между элементами) следуют из условия параллельности двух сторон четырехугольника; какие свойства и признаки следуют из условия попарной параллельности противоположащих сторон четырехугольника.

Исследование каждого из соотношений начинается с исследовательского вопроса.

Разработанная учебная тетрадь может оказать поддержку учителю. Использование учебной тетради поможет в обучении и организации учения, т.к. в ней предоставляется готовая логика исследования.

На основе особым образом поставленных вопросов, работа с тетрадью позволяет сформировать навыки построения доказательств, способы построения определений и утверждений, а также умение формулировать что-либо по образцу.

Апробация данной разработки была проведена в университетской гимназии №1 «Универс» г. Красноярска и неоднократно использовалась учителями гимназии.