

«Обновление содержания образования по математике на уровне основного общего образования»

11 мая 2017 г.

Содержательные предметные линии по алгебре

- **Числа и величины**

Система действительных чисел. Свойства неравенств. Свойства степеней.

- **Тождественные преобразования**

Переменные, константы, параметры; Выражения; уравнения; неравенства; их системы и совокупности. Равносильность уравнений, неравенств, систем и совокупностей. Область допустимых значений выражения. Тождественные преобразования выражений. Подстановка. Замена переменных.

- **Функции**

Числовые и точечные множества, операции над ними; Промежутки на координатной прямой; Координатная плоскость.

Зависимости между величинами и числами; Функции; Область определения функции; Способы задания функции; «Вырезание» и «склейка» функций; Сложная функция; Взаимно обратная функция.

Последовательности; Формула общего члена и рекуррентное задание последовательности.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Уровни усвоения

Уровни усвоения:

Репродуктивный– опора на форму культурного образца действия.

Общим критерием достижения этого уровня является действие по формальному образцу, предполагающее умение опознать по внешним признакам проблемную ситуацию и реализовать соответствующий алгоритм (правило) действия.

Рефлексивный– опора на содержательное основание способа действия – понятие, фиксирующее существенное отношение данной предметной области (линии).

Индикатором второго уровня является выполнение заданий, в которых внешние характеристики описанной ситуации не обеспечивают ориентировку действия, а существенное отношение замаскировано: зашумлено посторонними деталями или структурой условий.

Продуктивный– ориентация на поле возможностей способа действия.

Задания этого уровня предполагают актуализацию «функционального поля», обеспечивающего свободное отношение к освоенному способу действия и возможность подключения к решению задачи других интеллектуальных ресурсов.

Линия «Числа и величины»

Обобщенный предметный результат

Применять представления о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин

Предметный результат из ФГОС ООО (Математика. Алгебра. Геометрия.)

Развитие представлений о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел; овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений

Линия «Тождественные преобразования»

Обобщенный предметный результат

Использовать аппарат алгебры при построении математических моделей и их исследовании, в том числе при моделировании реальных ситуаций

Предметный результат из ФГОС ООО (Математика. Алгебра. Геометрия.)

Овладение символьным языком алгебры, приемами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат

К понятию переменной

- Переменная как буква, заменяющая число

$$3x^2 + 2x - 7 = 0$$

- Переменная как место, которое может занимать любое выражение

$$3 \square^2 + 2 \square - 7 = 0$$

- В первом случае уравнение
- $3\sin^2 x + 2\sin x - 7 = 0$ не является квадратным, а во втором является

Линия «Функция»

Обобщенный предметный результат

Использовать функциональные представления для описания и анализа различных зависимостей и при построении моделей и их исследовании

Предметный результат из ФГОС ООО (Математика. Алгебра. Геометрия.)

Овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей

Примеры разных толкований математических понятий

Понятие	С точки зрения понятия выражения	С функциональной точки зрения
Многочлен	Запись определенного вида (сумма одночленов). $x^2 + 1$ – многочлен $(x - 1)(x + 1)$ – не многочлен	Функция определенного вида (<u>может быть</u> <u>представлена</u> как сумма одночленов). $x^2 + 1$ и $(x - 1)(x + 1)$ – многочлены
Тождество	Равенство (выражений), верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных. $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ – тождество	Равенство функций $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ – не тождество

Числа и величины

- **1.** Вычислите значение выражения $\left((-3,5)^2 - 3\frac{1}{2}\right) : 2\frac{1}{2}$.
Ответ представьте в форме десятичной дроби.
- **2.** Перепишите следующие числа в порядке возрастания (от меньшего к большему): $\left(-\frac{2}{5}\right)^{25}$; $\left(-\frac{2}{5}\right)^{52}$; $(-2,5)^{25}$; $(-2,5)^{52}$.
- **3.** Числа k , m , p , среди которых одно положительное, другое отрицательное, а третье 0, удовлетворяют условию $k^2 = m^2(p - m)$. Какое из трех чисел положительное, какое отрицательное, какое 0?

Комментарии

- 1. Значение выражения можно вычислить «в лоб». Более интересное и простое решение: $\left((-3,5)^2 - 3\frac{1}{2}\right) : 2\frac{1}{2} = 3,5(3,5 - 1) : 2,5 = 3,5 \cdot 2,5 : 2,5 = 3,5$.
- 2. Задание рассчитано на применение правила знаков в условиях невозможности прямого вычисления значений степеней. Числа $(-2,5)^{25}$ и $\left(-\frac{2}{5}\right)^{25}$ отрицательные, причем $(-2,5)^{25}$ меньше, т.к. его модуль больше. $\left(-\frac{2}{5}\right)^{52}$ и $(-2,5)^{52}$ положительные, из них $(-2,5)^{52}$ большее. Ответ: $(-2,5)^{25}$; $\left(-\frac{2}{5}\right)^{25}$; $\left(-\frac{2}{5}\right)^{52}$; $(-2,5)^{52}$.
- 3. Необходимо рассматривать варианты (делать пробы). Например, k не может равняться 0, иначе либо также $m=0$, либо $p=m$, а двух одинаковых чисел нет. Аналогично m не может равняться 0, иначе $k=0$. Значит $p=0$. Получаем $k^2 = -m^3$. Значит k положительное, а m отрицательное число.

Тождественные преобразования

- 1. Вычислите значение выражения $x^2 + \frac{1}{x^2}$ при $x = 2$. Результат представьте в виде десятичной дроби.
- 2. Вычислите значение выражения $x^2 + \frac{1}{x^2}$, если известно, что $x + \frac{1}{x} = 8$.
- 3. Вычислите сумму кубов двух взаимно обратных положительных чисел, если сумма квадратов этих чисел равна 14.

Комментарии

- 1. Прямое вычисление $2^2 + \frac{1}{2^2} = 4 + \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}$
-
- 2. Найти x из уравнения $x + \frac{1}{x} = 8$, а затем подставить его в выражение $x + \frac{1}{x} = 8$ и найти значение требует непростой работы с корнями. Проще представить это выражение как выражение от новой переменной $x + \frac{1}{x}$, а это получается, если обе части равенства возвести в квадрат: $64 = (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$.
- Т.е. $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 62$
-
- 3. В отличие от задания второго уровня сначала требуется переформулировать условие на алгебраическом языке: «Вычислите значение выражения $x^3 + \frac{1}{x^3}$, если известно, что $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$ и $x > 0$ ». Тогда $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 16$, а значит $x + \frac{1}{x} = \sqrt{16} = 4$. Т.к. $x > 0$, то $x + \frac{1}{x} = 4$. В результате
- $x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}) = 4 \cdot 13 = 52$ или
- $x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) = 4^3 - 3 \cdot 4 = 52$

1. Какие из перечисленных значений x не принадлежат области определения функции

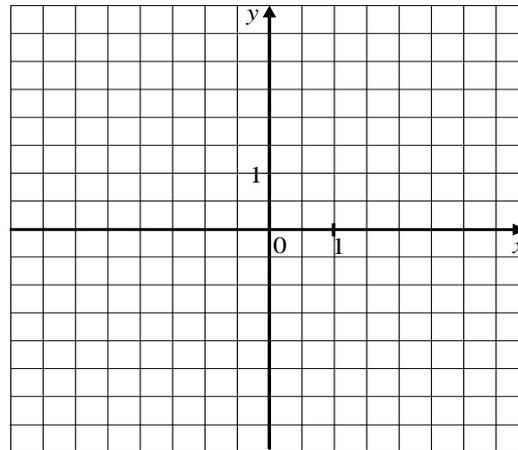
$$y = \frac{5(x-3)^2(x+7)}{(x+4)(x-3)} ?$$

Отметьте все такие значения.

А. -7 Б. -4 В. 0 Г. 3

2. Постройте график функции

$$y = \frac{x+2}{x^2+2x} .$$

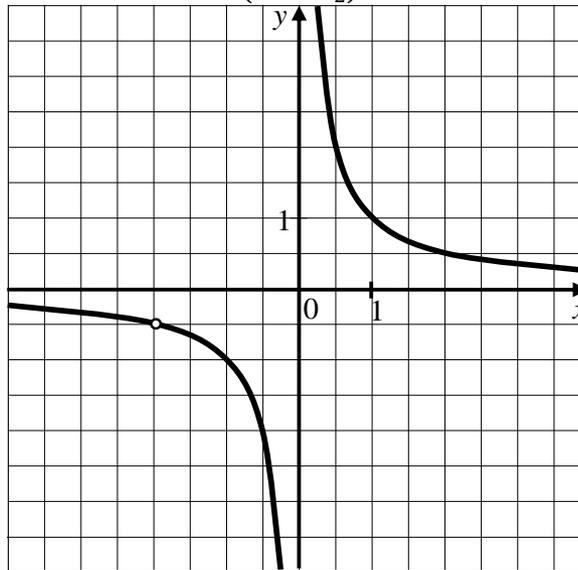


3. При каких значениях параметра c прямая $y = c$ не имеет ни одной общей точки с графиком функции $y = \frac{x^2-1}{|x|-1}$?

Комментарии

1. Простая проверка показывает, что в случаях Б и Г знаменатель дроби превращается в ноль.

2. После упрощения уравнение, задающее функцию примет вид $y = \frac{1}{x}$, а это уравнение гиперболы. Однако при упрощении (сокращении дроби на $x + 2$) в области определения исходной функции появилась лишняя точка $x = -2$. Поэтому из графика гиперболы надо выколоть точку с абсциссой -2 , т.е. точку $(-2; -\frac{1}{2})$.



3. После упрощения уравнение, задающее функцию примет вид $y = |x| + 1$. Условие пересечения прямой $y = c$ и данной функции описывается уравнением $c = |x| + 1$. Оно не будет иметь решения при $c < 1$ и будет иметь хотя бы одно решение при $c \geq 1$. Однако в область определения не входят точки $x = 1$ и $x = -1$. Поэтому в случае $c = 1 + 1 = 2$ также нет пересечения линий. Ответ или $c < 1$ или $c = 2$.

№3 На сколько знаков в дробном выражении нужно перенести запятую в числителе и знаменателе дроби, чтобы получить дробь с целыми числами

Задание	$\frac{5,6 \cdot 0,3}{0,8}$	$\frac{18}{4,5 \cdot 2,5}$	$\frac{0,4}{2,72 \cdot 3,4}$	$\frac{3,05 \cdot 1,2}{4,5}$	$\frac{3,6 \cdot 4}{0,6 \cdot 8}$
Ответ					

№4 Запишите в виде десятичной дроби числа.

1) $\frac{21}{10}$ 2) $\frac{15}{10}$ 3) $\frac{304}{10}$ 4) $\frac{105}{100}$ 5) $\frac{3}{5}$ 6) $\frac{1}{2}$ 7) $\frac{3}{4}$ 8) $3\frac{5}{10}$ 9) $4\frac{1}{2}$

№5 Сократите дробь.

а) 1) $\frac{56}{80}$ 2) $\frac{18}{60}$ 3) $\frac{48}{60}$ 4) $\frac{24}{120}$ 5) $\frac{18}{120}$ 6) $\frac{21}{14}$

б) 1) $\frac{12}{5 \cdot 4}$ 2) $\frac{26}{5 \cdot 4}$ 3) $\frac{56 \cdot 3}{80}$ 4) $\frac{18 \cdot 5}{60}$ 5) $\frac{48 \cdot 4}{60}$ 6) $\frac{1800}{45 \cdot 25}$

Эврика! Решу ОГЭ!

Найти значение выражения $\frac{5,6 \cdot 0,3}{0,8}$.

1. Уравниваю количество знаков после запятой в числителе и знаменателе	$\frac{5,6 \cdot 0,3}{0,80}$
2. Переносу запятую на два знака вправо в числителе и знаменателе	$\frac{56 \cdot 3}{80}$
3. Сокращаю дробь на 8	$\frac{7 \cdot 3}{10}$
4. Нахожу произведение в числителе	$\frac{21}{10}$
5. Записываю обыкновенную дробь в виде десятичной дроби	2,1

$$\frac{5,6 \cdot 0,3}{0,8} = \frac{56 \cdot 3}{80} = \frac{7 \cdot 3}{10} = 2,1$$

2	,	1
---	---	---

 Ответ:

Учитель, я хочу сам!

Вариант 1

$$1) \frac{4,8 \cdot 0,4}{0,6} \quad 2) \frac{1,6 \cdot 2,4}{1,2} \quad 3) \frac{5,6 \cdot 3,4}{11,9} \quad 4) \frac{8,4}{2,8 \cdot 1,2} \quad 5) \frac{3,2 \cdot 0,5}{1,6} \quad 6) \frac{19,8 \cdot (-5,6)}{6,3}$$

Вариант 2

$$1) \frac{1,8 \cdot 0,5}{0,6} \quad 2) \frac{2,8 \cdot 0,3}{0,7} \quad 3) \frac{1,8 \cdot 2,4}{1,2} \quad 4) \frac{18}{4,5 \cdot 2,5} \quad 5) \frac{4,5 \cdot 3,3}{19,8} \quad 6) \frac{-8,6 \cdot 2,3}{-4,6}$$

Пример трехуровневого задания для линии «Геометрические величины» (5 – 6 классы)

- Первый уровень (формальный)

Длина бассейна, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда 50 м, ширина 900 см, а высота в 3 раза меньше ширины. Сколько кубических метров воды вмещается в бассейн?

- Второй уровень (рефлексивный)

Длина бассейна, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда 50 м, ширина 900 см, а высота в 3 раза меньше ширины. Сколько плиток потребуется, чтобы облицевать стены и дно бассейна, если на 1 м^2 идёт 100 плиток?

- Третий уровень (функциональный)

Ширина и высота бассейна вместе меньше 12 м, а высота и длина бассейна вместе меньше 29 м. Каким наибольшим может быть объём, если высота бассейна больше 2 м?

- $f(x, y, z) = xyz$

$$\begin{cases} y + z < 12 \\ x + z < 29 \\ z > 2 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

- Высота $z = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$
- $V = z(11 - z)(28 - z)$
- длина 23 м, ширина 6 м, высота 5 м